## Kommentar zur Konvergenz:

1.) „Nebenteil" = normale Potenzreihe

$\Longrightarrow$ es gibt einen wohldefinierten

Konvergenzradius $r_2 \in [0, \infty]$ von

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

2.) im Hauptteil substituiere

$$w = \frac{1}{z-z_0}$$

$$\Longrightarrow \text{Hauptteil} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$$

= Potenzreihe in $w$

mit Konvergenzradius $\rho \in [0, \infty]$

Offenbar:

Konvergenz für $w$ mit $|w| < \rho \iff$

Konvergenz des Hauptteils für

$z$ mit $|z - z_0| > \frac{1}{\rho} =: r_1$

---

Verein barung: Die Laurent Reihe

! heißt konvergent für Punkte $z$

$:\iff$ sowohl Haupt- als auch

Nebenteil sind für diese $z$

konvergent

---

Mit dieser Vereinbarung und unserem Wissen über das Konvergenzverhalten von Potenzreihen folgt:

$\boxed{\text{Satz 24.2.1}}$ : Für eine Laurent Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ gilt eine der drei folgenden Alternativen:

i) Die Reihe konvergiert nirgends.

[ entspricht $r_1 > r_2$ ]

ii) Die Reihe konvergiert höchstens auf einer Kreislinie um $z_0$ bzw. für gewisse Punkte darauf.

[ entspricht dem Fall $r_1 = r_2$ und der möglichen Konvergenz von Potenzreihen in Randpunkten ]

iii) Die Laurent Reihe konvergiert auf einem Kreisring um $z_0$.

[ entspricht $r_1 < r_2$ ]

Nun zur Entwicklung einer auf einem Kreisring vorgegebenen und dort holomorphen Funktion

$$f : A_{r_1, r_2}(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$$

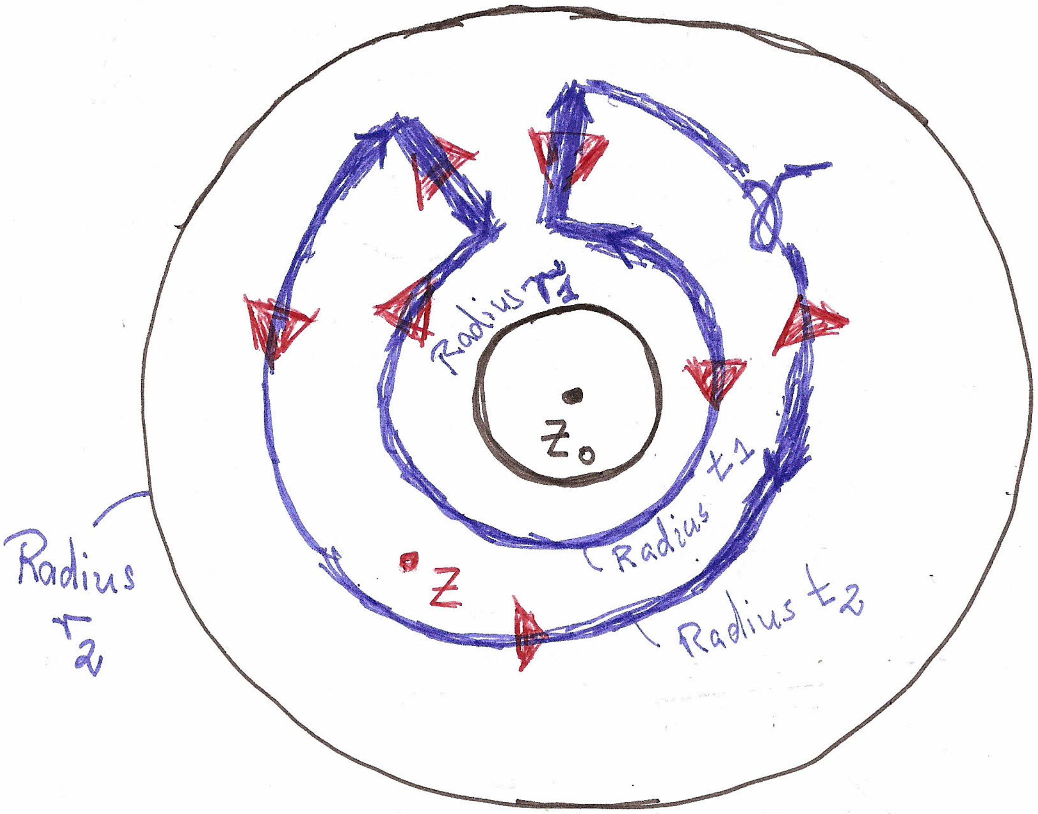
mit $\quad 0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty .$

Die Frage lautet:

$$\boxed{\text{Kann man } f \text{ auf } A_{r_1,r_2}(z_0) \text{ eindeutig als konvergente Laurent Reihe } \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ schreiben?}}$$

Ja!

Dazu folgendes Bild:




Sei $z \in A_{r_1, r_2}(z_0)$ beliebig.

$\gamma$ besteht aus 2 geraden Stücken und aus 2 „fast Kreislinien" mit Radien $t_1 < t_2$, wobei

- $r_1 < t_1 < t_2 < r_2$
- $z$ liegt im Inneren von $\gamma$
- $\gamma$ positiv orientiert

<u>entscheidend:</u>

$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \text{ umschließt „keine Löcher"} \\ \text{von } A_{r_1, r_2}(z_0) \end{array} \right.$

(verläuft in einem einfach zshgden Teilgebiet von $A_{r_1,r_2}(z_0)$) !

Verallgemeinerung von Cauchy's Formel (Bem 3.) zu Satz 23.2.1) $\Longrightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi ;$$

„Grenzübergang bei $\gamma$" $\Longrightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa_{t_2}(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa_{t_1}(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

$$=: f_2(z) + f_1(z)$$

Wir wiederholen eine bekannte Rechnung:

Sei o. E. $z_0 = 0$. Nach Wahl von $z$ ist für $|\xi| = t_2$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi} \frac{1}{1 - z/\xi} = \frac{1}{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\xi}\right)^n,$$

für $|\xi| = t_1$ gilt dagegen:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{1 - \xi/z} \left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{z}\right)^n.$$

Einsetzen in $f_i(z)$, $i = 1, 2$:

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{t_2}(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} z^n \, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{\mathcal{K}_{t_2}(0)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi,$$

$$f_1(z) = + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_{t_1}(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi^{-n}} z^{-n-1}\, d\xi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_{t_1}(0)} \frac{f(\xi)}{\xi^{-n}}\, d\xi$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} z^{-m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_{t_1}(0)} \frac{f(\xi)}{\xi^{-m+1}}\, d\xi$$

Damit ist gezeigt:

$$f(z) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_{t_2}(0)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \, d\xi \right\} z^n +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_{t_1}(0)} \frac{f(\xi)}{\xi^{-m+1}} \, d\xi \right\} z^{-m}$$

D.h.: $f$ ist gemäß Def. 24.2.1 auf $A_{r_1, r_2}(0)$ als konvergente (!) Laurent Reihe geschrieben.

Beobachtung: In $\int_{\mathcal{K}_{t_i}(0)} \dots d\xi$ kann man $t_i$ durch einen beliebigen Radius $\rho \in (r_1, r_2)$ ersetzen. $\Longrightarrow$

$\boxed{\text{Satz } 24.2.2}$ (<u>Laurent</u> <u>Entwicklung</u>):

Sei $f$ holomorph auf dem Kreisring

$A_{r_1,r_2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$,

wobei $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$.

Für $k \in \mathbb{Z}$ und $\rho \in (r_1, r_2)$ setzt man

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \, dw.$$

Dann gilt für $z \in A_{r_1,r_2}(z_0)$ (im Sinne von Def. 24.2.1) die <u>eindeutige</u> Darstellung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k .$$

Bem: 1.) Die Kreislinie $\mathcal{K}_\rho(z_0)$ kann ersetzt werden durch einen einfach geschlossenen, positiv orientierten Weg $\gamma$ in $A_{r_1, r_2}(z_0)$.
(vgl. Umfeld von Cauchy's Satz)

2.) Eine Taylor Reihe ist eine Laurent Reihe mit $a_{-k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

3.) Bei der Laurent Entwicklung bezieht man sich immer auf einen festen Kreisring. Verändert man diesen, so ändert sich i.a. die

Entwicklung ! (andere Koeffizienten $a_k$)

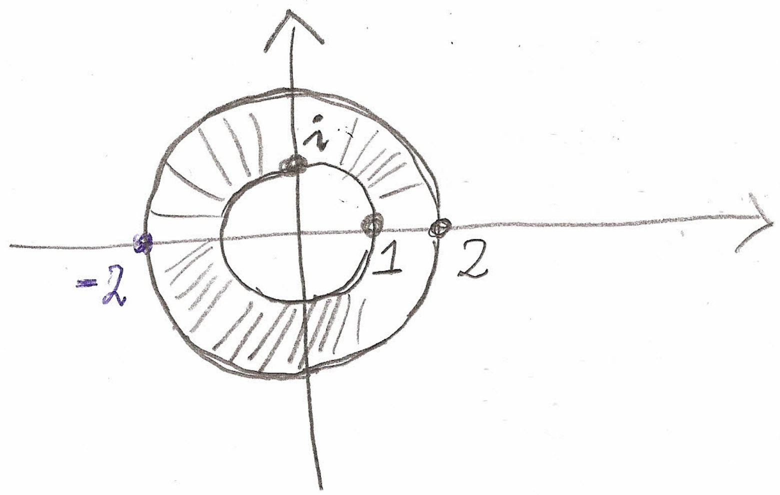
**Beispiel:** Wir gehen zurück zu

$$f(z) := \frac{3}{(1-z)(2+z)} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2+z},$$

$z \in \mathbb{C} - \{1, -2\}$.

Wähle den Kreisring

$$A_{1,2}(0) := \{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2 \}$$




$\Longrightarrow$ $f$ holomorph auf $A_{1,2}(0)$;

die Laurent Entwicklung geschieht durch

direkte Rechnung:

Sei $z \in A_{1,2}(0) \Longrightarrow$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-1/z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

(Konvergenz wegen $|z|>1$ !),

$$\frac{1}{2+z} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+z/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(z/2\right)^n(-1)^n$$

(Konvergenz wegen $|z|<2$ !).

Die Laurent Reihe von $f$ auf $A_{1,2}(0)$ lautet

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\,z^n$$

Hauptteil, konvergent für $|z|>1$

Nebenteil, konvergent für $|z|<2$